Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 0

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: keine, nicht bewertetes Präsenzübungsblatt, mit Hilfe des Tutors zu bearbeiten

---

Aufgabe 0.1 *Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten*

Betrachten Sie einen Koordinatenwechsel von kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) auf Zylinderkoordinaten (r, φ, z) im $\mathbb{R}^3$. Transformieren Sie den Laplace-Operator

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2$$

in Zylinderkoordinaten mit

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi, \\ x_2 &= r\sin\varphi, \\ x_3 &= z. \end{aligned}$$

Aufgabe 0.2 *Volumen und Oberfläche der Einheitskugel*

Sei $\kappa_n := |\mathbb{B}_1(0)|$ das Lebesgue-Maß der Einheitskugel $\mathbb{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ sowie $\omega_{n-1} := \int_{\partial\mathbb{B}_1(0)} \mathrm{d}\sigma$ deren Oberflächeninhalt.

(a) Leiten Sie für $n \geq 3$ die Rekursionsformel $\kappa_n = \frac{2\pi}{n}\kappa_{n-2}$ her.

Hinweis. Benutzen Sie dazu Querschnitte von Kugeln und zeigen Sie, dass diese Kugeln niederer Dimensionen sind. Nutzen Sie dann die Skalierungseigenschaften des Lebesgue-Maßes und (zweidimensionale) Polarkoordinaten.

(b) Wir definieren die Funktion

$$\Gamma\colon\,]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 t.$$

Beweisen Sie, dass $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

(c) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\kappa_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

(d) Seien $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $R > 0$. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{B}_R(0)} f\, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_0^R \int_{\partial\mathbb{B}_r(0)} f\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 r = \int_0^R \int_{\partial\mathbb{B}_1(0)} f(r\,\vartheta)\, \mathrm{d}\sigma_\vartheta\; r^{n-1}\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 r.$$

und folgern Sie hieraus $\omega_{n-1} = n\,\kappa_n$.

Hinweis. Verwenden Sie die Immersionen

$$\Phi^\pm\colon U \times]0,R[\longrightarrow H^\pm, \qquad (\xi, r) \longmapsto (r\,\xi_1, \ldots, r\,\xi_{n-1}, \pm r\sqrt{1-|\xi|^2}),$$

wobei $U := \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |\xi| < 1\}$, sowie die obere bzw. untere Halbkugel

$$H^\pm = \mathbb{B}_R(0) \cap \{(\hat{x}, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x_n > 0\,(x_n < 0)\}.$$