Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 0

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: keine, nicht bewertetes Präsenzübungsblatt, mit Hilfe des Tutors zu bearbeiten

Aufgabe 0.3 *Existenz eines äußeren Einheitsnormalenfeldes*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit Rand $\partial\Omega$ von der Klasse C^1. Es bezeichne $T_{x_0}\partial\Omega$ den Tangentialraum von $\partial\Omega$ im Punkt $x_0 \in \partial\Omega$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt genau eine Abbildung $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft:
$\nu(x_0) \perp T_{x_0}\partial\Omega$ ist ein Einheitsvektor und für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $x_0 + t\nu(x_0) \notin \Omega$ für $t \in]0, \varepsilon[$ gilt.

(b) Die Abbildung $\nu : \partial\Omega \to \partial\mathbb{B}_1(0)$ ist stetig.

Man bezeichnet $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ auch als äußeres Einheitsnormalenfeld von Ω.

Hinweis. Wegen $\partial\Omega \in C^1$ gibt es zu $x_0 \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $\nabla\phi(x_0) \neq 0$ und

$$\begin{aligned} U \cap \partial\Omega &= \{x \in U \mid \phi(x) = 0\}, \\ U \cap \Omega &= \{x \in U \mid \phi(x) < 0\}. \end{aligned}$$

Nutzen Sie den Gradienten von ϕ zur Bestimmung von ν.

Aufgabe 0.4 *Glättung von Funktionen*
Zu $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$ lässt sich eine Dirac-Folge $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ durch

$$\varphi_\varepsilon(x) := \|\varphi\|^{-1}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

definieren mit $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$ und für jedes $\varrho > 0$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}_\varrho(0)} \varphi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für die Glättung $\varphi_\varepsilon * f$ einer Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Ist $\varphi \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\varphi_\varepsilon * f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\partial^\alpha(\varphi_\varepsilon * f) = \partial^\alpha\varphi_\varepsilon * f$$

für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$.

(b) Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\varphi_\varepsilon * f \to f$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig auf kompakten Mengen.

(c) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$, dann konvergiert $\varphi_\varepsilon * f \to f$ für $\varepsilon \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis. Sie können die Dichtheit von $C^0_c(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$ verwenden.