Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 1

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 29. Oktober, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 1.1 *Lösung mittels Fourier-Reihe* 5 Punkte

Jede in $\mathbb{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ hinreichend oft differenzierbare Funktion u lässt sich durch ihre FOURIER-Reihe darstellen:

$$u(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(r) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} \quad \text{für } z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \text{ mit } r \in [0, R[.$$

Dabei sind die Koeffizienten a_k eindeutig bestimmt durch

$$a_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi} \,\mathrm{d}\mathcal{L}^1\varphi.$$

(a) Begründen Sie geeignete Voraussetzungen an u, sodass die Fourier-Reihe lokal gleichmäßig konvergiert, d.h. wenn es zu jedem Punkt $w = (r, \varphi) \in [0, R[\times[0, 2\pi)$ eine offene Umgebung U_w von w gibt, auf welcher die Partialsummen gleichmäßig gegen die Reihe konvergieren.

(b) Bestimmen Sie die Form der Koeffizienten $a_k, k \in \mathbb{Z}$, für eine harmonische Funktion $u : \mathbb{B}_R(0) \to \mathbb{R}$.

Hinweis. Leiten Sie mittels Aufgabe 0.1 eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Koeffizienten a_k her und versuchen Sie den Lösungsansatz

$$a_k(r) = \begin{cases} b_+ r^k + b_- r^{-k} & \text{für} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ b_+ \ln(r) + b_- & \text{für} \quad k = 0. \end{cases}$$

(c) Im Falle einer in $\mathbb{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ harmonischen Funktion $u \in C(\overline{\mathbb{B}_1(0)})$ sind die Koeffizienten a_k explizit in Abhängigkeit der Fourier-Koeffizienten von $u|_{\partial\mathbb{B}_1(0)}$ zu berechnen.

Aufgabe 1.2 *Greensche Funktion für äußeres Dirichlet-Problem* 5 Punkte

Bestimmen Sie eine Greensche Funktion $\Psi = \varphi + \Phi$ des Laplace-Operators auf dem Komplement $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}_R(0)}$ mit Radius $R > 0$. Gesucht ist dazu eine Funktion

$$\varphi : \overline{\Omega} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $y \in \Omega$:

(i) $\varphi(\cdot, y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$,

(ii) $\Delta_x \varphi(x, y) = 0$ für alle $x \in \Omega$,

(iii) $\varphi(x, y) + \Phi(x, y) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$.

Bestimmen Sie eine solche Funktion φ und leiten Sie die Darstellung für jede Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger in $\overline{\Omega}$ und $\Delta u \in L^1(\Omega)$ analog zu Satz 2.8 der Vorlesung her.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.3 *Eindeutigkeit des Dirichlet-Problems* 5 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge, die eine Greensche Funktion Ψ des Laplace-Operators zu DIRICHLET-Randbedingungen besitzt und einen Rand $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 mit äußerem Einheitsnormalenfeld $\nu \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ hat.
Zeigen Sie, dass es höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ u = u_0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

zu $u_0 \in C(\partial\Omega)$ und $f \in C(\overline{\Omega})$ gibt.