Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 10

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 14. Januar, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 10.1 *Sobolev-Einbettungssätze in einer Dimension* 5 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f \in C^1(I)$ für $I := [a, b]$ beliebig. Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen für $p > 1$ und $\alpha = 1 - 1/p$

$$\|f\|_{C(I)} \leq \frac{1}{b-a}\|f\|_{L^1(I)} + \|f'\|_{L^1(I)}, \tag{1}$$

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(I)} \leq \|f\|_{C(I)} + \|f'\|_{L^p(I)}. \tag{2}$$

Dabei ist $\|f\|_{C(I)} = \sup_{x\in I} |f(x)|$ sowie

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(I)} = \|f\|_{C(I)} + \sup_{\substack{x,y\in I,\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Aufgabe 10.2 *Approximation von Sobolev-Funktionen* 5 Punkte

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, sowie $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine glatte Dirac-Folge mit $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset \overline{\mathbb{B}_\varepsilon(0)}$ wie in Aufgabe 8.2. Sei $\overline{f}$ die Fortsetzung von f durch Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ und

$$f_\varepsilon(x) := (\varphi_\varepsilon * \overline{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\,\overline{f}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$, so ist $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m$ gilt $\partial^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha f)_\varepsilon$ sowie $f_\varepsilon \to f$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$.

(b) Ist $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, dann gilt für alle offenen Mengen $U \subset \Omega$ mit $\delta = \mathrm{dist}(U, \partial\Omega) > 0$ $f_\varepsilon \in C^\infty(U) \cap W^{m,p}(U)$ für alle $0 < \varepsilon < \delta$ und $f_\varepsilon \to f$ in $W^{m,p}(U)$ für $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 10.3 *Produktregel für Sobolev-Funktionen* 5 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie $f \cdot g \in W^{1,1}(\Omega)$ für $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $g \in W^{1,q}(\Omega)$ und die folgende Produktregel für die schwachen Ableitungen:

$$D^i(f \cdot g) = f \cdot D^i g + D^i f \cdot g \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$