Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 11

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 21. Januar, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 11.1 *Schwache Lösung eines Neumann-Problems* 5 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien die Koeffizienten $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, sodass der zugehörige Differentialoperator gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstante $\lambda_0 > 0$ ist. Zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$ erfüllt eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ des homogenen Neumann-Randwertproblems

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

die schwache Formulierung

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}\,\partial_i u \cdot \partial_j \varphi + u\varphi \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \qquad \forall\, \varphi \in W^{1,2}(\Omega). \tag{1}$$

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Lax-Milgram, dass es genau eine schwache Lösung der Variationsgleichung (1) gibt und diese eine Abschätzung der Form

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

für ein von f unabhängiges $C > 0$ erfüllt.

Aufgabe 11.2 *Nicht-triviale Lösung der Wärmeleitungsgleichung* 5 Punkte

Betrachten Sie zu festem $\alpha > 1$ die Funktion $g \in C(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-t^{-\alpha}), & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

(a) Machen Sie sich klar, dass $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine glatte Funktion ist und betrachten Sie zu den k-ten Ableitungen $g^{(k)}$ von g die Funktion $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x,t) := \sum_{k=0}^\infty \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}.$$

(b) Beweisen Sie, dass u eine von 0 verschiedene klassische Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf ganz $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ist.

Hinweis. Unter Verwendung der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel lässt sich die Abschätzung

$$|g^{(k)}(t)| \le \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right)$$

für die k-te Ableitung von g herleiten, indem man über den Kreisrand $\partial\mathbb{B}_{\theta t}(t) \subset \mathbb{C}$ für ein zu wählendes $\theta = \theta(\alpha) \in (0,1)$ integriert. (Falls Sie genügend Zeit haben, können Sie dies tun.) Sie können außerdem ohne Beweis die Abschätzung $(k!)^2 \le (2k)!$ für $k \in \mathbb{N}_0$ verwenden.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3 *Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung* 5 Punkte
Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ und Φ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf ganz $\mathbb{R}^n$. Definiere zu $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ und $r > 0$ die sogenannte Wärmekugel

$$E(t, x; r) := \Big\{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid s < t, \Phi(x - y, t - s) \geq r^{-n}\Big\}.$$

Zeigen Sie, dass für eine Lösung $u \in C^\infty((0, T) \times \Omega)$ der homogenen Wärmeleitungsgleichung für jedes $E(t, x; r) \subset (0, T) \times \Omega$ die Mittelwerteigenschaft

$$u(t, x) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(t,x;r)} u(s, y) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{1+n}(s, y).$$

gilt. Bearbeiten Sie hierzu die folgenden Schritte:

(a) Machen Sie sich klar, dass es genügt, die Aussage nur im Fall $(t, x) = (0, 0)$ zu beweisen. Schreiben Sie vereinfacht $E_r = E(0, 0; r)$. Definieren Sie das Integral

$$\phi(r) := \frac{1}{r^n} \int_{E_r} u(s, y) \frac{|y|^2}{s^2} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{1+n}(s, y) = \int_{E_1} u(r^2 s, ry) \frac{|y|^2}{s^2} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{1+n}(s, y)$$

und zeigen Sie, dass ϕ (für entsprechend kleine Radien) differenzierbar ist mit

$$\phi'(r) = A(r) + B(r), \qquad \text{wobei} \quad B(r) = \frac{2}{r^{n+1}} \int_{E_r} \partial_s u(s, y) \frac{|y|^2}{s} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{1+n}(s, y).$$

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$\psi : E_r \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (s, y) \longmapsto -\frac{n}{2} \ln(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \ln(r)$$

Zeigen Sie, dass sich ψ stetig auf den Rand ∂E_r fortsetzen lässt und dort den Wert Null annimmt. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von ψ.

(c) Verwenden Sie ψ zur Darstellung von

$$B(r) = \frac{4}{r^{n+1}} \int_{E_r} \partial_s u(s, y)(y \cdot \nabla_y \psi(s, y)) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{1+n}(s, y).$$

Folgern Sie mittels partieller Integration in entsprechende Koordinaten-Richtungen und unter Verwendung von $\partial_s \psi$, dass $\phi' = 0$ ist.

(d) Ermitteln Sie den Wert der für kleine Radien konstanten Funktion ϕ. Sie können dabei ohne Beweis den Integralwert

$$\frac{1}{4} \int_{E_1} \frac{|y|^2}{s^2} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{1+n}(s, y) = 1$$

verwenden.