Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 12

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 28. Januar, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 12.1 *Invarianzen der Wärmeleitungsgleichung* 5 Punkte

Sei $u \in C^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0 \qquad \text{für alle} \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, dann ist die Funktion u_λ eine Lösung von (1), wobei

$$u_\lambda(t,x) := u(\lambda^2 t, \lambda x) \qquad \text{für alle} \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n.$$

(b) Sei $O \in \mathcal{O}(n)$ eine orthogonale, reelle Matrix, dann ist die Funktion u^O eine Lösung von (1), wobei

$$u^O(t,x) := u(t, Ox) \qquad \text{für alle} \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n.$$

(c) Die Funktion

$$v(t,x) := \frac{1}{2} x\cdot\nabla_x u(x,t) + t\,\partial_t u(t,x) \qquad \text{für alle} \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$$

ist eine Lösung von (1).

Aufgabe 12.2 *Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung* 5 Punkte

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $T>0$. Die Funktion $u\in C^0((0,T]\times\Omega)\cap C^{1;2}((0,T]\times\Omega)$ erfülle die strikte Ungleichung

$$\partial_t u - \Delta_x u < 0 \qquad \text{in} \quad (0,T]\times\Omega.$$

Zeigen Sie, dass dann u kein lokales Maximum in $(0,T]\times\Omega$ besitzen kann.
Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage für lokale Minima.

Hinweis. Machen Sie sich klar, welche Bedingungen notwendig für ein lokales Extremum gelten.

Aufgabe 12.3 *Einfache Transportgleichungen* 5 Punkte

Seien $n\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ und $g\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \partial_t u + b\cdot\nabla_x u = 0 & \text{in} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ \qquad\qquad u = g & \text{auf} \quad \{t=0\}\times\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$u : [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (t,x)\longmapsto g(x-tb)$$

eine Lösung von (2) ist und bestimmen Sie die Regularität von u.

(b) Machen Sie sich klar, welcher Prozess durch obiges Problem (2) beschrieben wird.

(c) Finden Sie mithilfe Ihrer Überlegungen aus Aufgabenteil (b) eine Lösung v des Problems

$$\begin{cases} \partial_t v + tb\cdot\nabla_x v = 0 & \text{in} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ \qquad\qquad v = g & \text{auf} \quad \{t=0\}\times\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Bitte wenden!

(d) Eine Funktion $u \in L^1_{loc}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ heißt schwache Lösung von (2), falls

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Big(u\partial_t \varphi + bu \cdot \nabla_x \varphi \Big) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n x \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 t + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(0,x) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n x = 0 \tag{3}$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ gilt.
Zeigen Sie, dass sich die Variationsgleichung (3) aus (2) herleiten lässt. Inwiefern lässt sich die Regularität der Anfangsdaten g dabei abschwächen?