Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 2

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 5. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 2.1 *Eindimensionale Greensche Funktion* 5 Punkte

Sei $\Omega =]0, L[\subset \mathbb{R}$ für ein $L > 0$ gegeben. Betrachten Sie die Funktion

$$\Psi : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto \begin{cases} y\left(1 - \frac{x}{L}\right) & \text{für} \quad x > y, \\ x\left(1 - \frac{y}{L}\right) & \text{für} \quad x \leq y. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass Ψ eine Fundamentallösung von $-\Delta$ auf Ω ist und geben Sie eine Lösungsdarstellung von $u \in C_c^2(\Omega)$ der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω an.

(b) Prüfen Sie, ob Ψ bereits eine Greensche Funktion der Laplace-Gleichung auf Ω darstellt. Das heißt, dass $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^1(\Omega)$ die Gleichung

$$u(y) = -\int_\Omega \Psi(x,y)\Delta u(x) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 x + \int_{\partial\Omega} \Psi(x,y)\partial_\nu u(x) - u(x)\partial_{\nu_x}\Psi(x,y) \, \mathrm{d}\sigma_x$$

erfüllt. Bestimmen Sie eine Lösungsdarstellung von $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ der Laplace-Gleichung $-\Delta u = 0$ mit den Dirichlet-Randwerten $u(0) = u_0$ und $u(L) = u_L$.

Hinweis. Verwenden Sie hierzu $\int_{\partial\Omega} g \, \mathrm{d}\sigma = g(0) + g(L)$.

(c) Skizzieren Sie die Funktion $x \mapsto \Psi(x, y_0)$ für verschiedene Werte von y_0.

Aufgabe 2.2 *Greensche Funktion für den Halbraum* 5 Punkte

Bestimmen Sie eine Greensche Funktion $\Psi = \varphi + \Phi$ des Laplace-Operators auf dem Halbraum $H_n^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}$. Gesucht ist dazu eine Funktion $\varphi : \overline{H_n^+} \times H_n^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften für alle $y \in H_n^+$:

(i) $\varphi(\cdot, y) \in C^1(\overline{H_n^+}) \cap C^2(H_n^+)$,

(ii) $\Delta_x \varphi(x,y) = 0$ für alle $x \in H_n^+$,

(iii) $\varphi(x,y) + \Phi(x,y) = 0$ für alle $x \in \partial H_n^+$.

Bestimmen Sie eine solche Funktion φ mithilfe des in der Vorlesung eingeführten Prinzips der Spiegelladung und leiten Sie die Darstellung analog zu Satz 2.8 der Vorlesung für jede Funktion $u \in C^1(\overline{H_n^+}) \cap C^2(H_n^+)$ mit kompaktem Träger in $\overline{H_n^+}$ und $\Delta u \in L^1(H_n^+)$ her.

Aufgabe 2.3 *Satz von Liouville für harmonische Funktionen* 5 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch.

(a) Zeigen Sie die folgende Abschätzung für jeden Punkt $x \in \Omega$ und Radius $R > 0$ mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{R} \max_{y \in \partial\mathbb{B}_R(x)} |u(y)|.$$

(b) Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und u beschränkt. Beweisen Sie, dass u dann bereits konstant ist.