Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 4

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 19. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 4.1 *Charakterisierung sub-/superharmonischer Funktionen* 5 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sowie $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Weiter sei $f : u(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine im Bild von u konvexe, stetige Funktion.

(a) Zeigen Sie für jede harmonische Funktion u, dass $f \circ u$ subharmonisch ist.

Hinweis. Verwenden Sie die Jensensche Ungleichung für Lebesgue-Integrale aus Höherer Analysis.

(b) Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad x \longmapsto |x|^\alpha.$$

Bestimmen Sie in den folgenden Fällen diejenigen α, für welche die Funktion u_α subharmonisch, harmonisch bzw. superharmonisch ist.

(i) $\Omega = \mathbb{B}_1(0) \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $\Omega = \mathbb{B}_1(0)$ und $\alpha \geq 0$.

Hinweis. Es empfiehlt sich die Raumdimensionen $n = 1, n = 2$ sowie $n \geq 3$ zu unterscheiden und mit (i) zu beginnen. Machen Sie sich klar, wie die Aussage von Teilaufgabe (a) für konkave Funktionen lautet.

Aufgabe 4.2 *Maximumprinzipien* 5 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^3(\Omega)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = u^3 & \text{in} \quad \Omega, \\ |\nabla u| \leq 1 & \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $|\nabla u| \leq 1$ in $\overline{\Omega}$ gilt.

Hinweis. Betrachten Sie die Funktion $v(x) = |\nabla u(x)|^2$.

Aufgabe 4.3 *Äußere Kugelbedingung für C^2-Ränder* 5 Punkte

Für $n \geq 2$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit einem Rand von der Klasse C^2, d.h. der Rand $\partial\Omega$ ist eine $(n-1)$-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit und Ω liegt lokal nur auf einer Seite von $\partial\Omega$:

Zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und $\phi \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $\nabla\phi(x_0) \neq 0$ und

$$U \cap \partial\Omega = \{x \in U \mid \phi(x) = 0\},$$
$$U \cap \Omega = \{x \in U \mid \phi(x) < 0\}.$$

Beweisen Sie, dass jeder Randpunkt eine äußere Sphärenbedingung erfüllt.