Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 6

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 3. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 6.1 *Kegelbedingungen* 5 Punkte

Für $n \geq 2$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Besitze Ω einen Lipschitz-Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Beweisen Sie, dass jeder Randpunkt $\xi \in \partial\Omega$ eine äußere sowie innere (d.h. analog zu Definition 2.21 $C_\alpha \cap B_R(\xi) \subset \Omega$) Kegelbedingung erfüllt.

Dabei bedeutet ein Rand $\partial\Omega$ von der Klasse $C^{0,1}$, dass es für jedes $\xi \in \partial\Omega$ ein $r > 0$, ein (evtl. durch Rotation, Spiegelung entstandenes) orthogonales Koordinatensystem $(y_1, \dots, y_n)$ und eine $C^{0,1}$-Funktion $\gamma : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\Omega \cap B_r(\xi)$ in den neuen Koordinaten unterhalb des Graphen von γ liegt, d.h. mit der Abkürzung $\overline{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$ gelte $\{\overline{y} \mid y \in B_r(\xi)\} \subset U$ sowie

$$\Omega \cap B_r(\xi) = \{y \in B_r(\xi) \mid y_n < \gamma(\overline{y})\},$$
$$\partial\Omega \cap B_r(\xi) = \{y \in B_r(\xi) \mid y_n = \gamma(\overline{y})\}.$$

(b) Betrachten Sie die offenen Mengen $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3$, definiert durch

$$\Omega_1 := \{(x, y) \in (0, 1)^2 \mid y < \sqrt{x}\}, \qquad \Omega_2 := (0, 1)^2 \setminus \overline{\Omega_1}, \qquad \Omega_3 := \mathbb{B}_1(0) \setminus \{0\}$$

sowie den Lebesgue Spine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 5.3. Untersuchen Sie, ob die Mengen einen Lipschitz-Rand besitzen.

Aufgabe 6.2 *Kompatibilitätsbedingung beim Neumann-Randwertproblem* 5 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1-Rand und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Neumannschen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \partial_\nu u = \psi & \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $f \in L^1(\Omega)$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ und ν das Einheitsnormalenfeld zu $\partial\Omega$ ist.

(a) Folgern Sie, dass die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n + \int_{\partial\Omega} \psi \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

erfüllt sein muss.

(b) Sei $\Omega =]0, L[\subset \mathbb{R}$ für ein $L > 0$ gegeben. Betrachten Sie die Funktion

$$\Phi_N : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2}{2L} - y & \text{für} \quad x < y, \\ \frac{x^2}{2L} - x & \text{für} \quad x \geq y. \end{cases}$$

Bitte wenden!

Prüfen Sie, ob Φ_N bereits eine Greensche Funktion der Laplace-Gleichung auf Ω darstellt. Das heißt, dass jedes $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^1(\Omega)$ die Gleichung

$$u = -\int_{\Omega} \Phi_N(x, \cdot)\Delta u(x) \,\mathrm{d}\mathcal{L}^1 x + \int_{\partial\Omega} \Phi_N(x, \cdot)\partial_\nu u(x) \,\mathrm{d}\sigma_x + const.$$

erfüllt. Bestimmen Sie außerdem eine Darstellung aller Lösungen $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f \in L^1(\Omega)$ mit Neumann-Randwerten unter geeigneten Kompatibilitätsbedingungen.

Hinweis. Verwenden Sie hierzu wie üblich das Randintegral $\int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}\sigma = g(0) + g(L)$.

Aufgabe 6.3 *Singuläre integrierbare Funktionen* 5 Punkte

Betrachten Sie für $R > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ sowie $n \in \mathbb{N}$ die rotationssymmetrische Funktion

$$\Psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} |x|^{-\alpha} & \text{für} \quad 0 < |x| \leq R, \\ 0 & \text{für} \quad |x| > R. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass Ψ genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn $\alpha < n$ ist.