Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 7

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 10. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 7.1 *Hölder-stetige Funktionen* 5 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\alpha \in]0,1]$. Betrachten Sie die Vektorräume $C^{0,\alpha}(\Omega)$ bzw. $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ der lokal α-Hölder-stetigen Funktionen.

(a) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\|\cdot\|_{0,\alpha} : C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u \longmapsto \sup_{\overline{\Omega}} |u| + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

wohldefiniert ist und eine Norm auf $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ definiert.

Hinweis. Sie können aus der Vorlesung $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$ verwenden und, dass solche Funktionen gleichmäßig α-Hölder-stetig sind.

(b) Zeigen Sie, dass $(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{0,\alpha})$ ein Banach-Raum ist. Benutzen Sie hierfür die Vollständigkeit von $C(\overline{\Omega})$ versehen mit der Supremumsnorm.

(c) Beweisen Sie die Inklusionen

$$C^1(\Omega) \subset C^{0,1}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Gelten diese auch für unbeschränkte Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 7.2 *Abschneidefunktionen* 5 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ gegeben.

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Weisen Sie $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ nach und folgern Sie, dass

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1], \quad x \longmapsto \phi(r^2 - \|x - x_0\|^2)$$

eine Funktion aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist mit kompaktem Träger $\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\mathbb{B}_r(x_0)}$, wobei der Träger gemäß

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

definiert ist.

(b) Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, die Abschneidefunktion

$$\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{\phi(b-x)}{\phi(b-x) + \phi(x-a)}$$

und zeigen Sie $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ mit $\phi \equiv 1$ für $x \leq a$, $\phi \equiv 0$ für $x \geq b$ sowie $\theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3 *Nicht-Existenz von Lösungen der Poisson-Gleichung* 5 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in \Omega$ sowie $w : \Omega \setminus \{x_0\}$ harmonisch und beschränkt.

(a) Zeigen Sie, dass sich w harmonisch auf ganz Ω fortsetzen lässt und zwar mithilfe des Poisson-Integrals zur Lösung v des Problems

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in} \quad \mathbb{B}_\delta(x_0), \\ v = w & \text{auf} \quad \partial\mathbb{B}_\delta(x_0) \end{cases}$$

für hinreichend kleines $\delta > 0$.

(b) Betrachten Sie für ein $R \in]0,1[$ die offene Menge $\Omega = \mathbb{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ sowie die Funktion

$$v(x) = (x_1^2 - x_2^2) \cdot (-\ln|x|)^{1/2}.$$

(i) Zeigen Sie, $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$, jedoch $v \notin C^2(\Omega)$.

(ii) Verifizieren Sie, dass Δv stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden kann mit Fortsetzung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_2^2 - x_1^2}{4|x|^2} \left(8(-\ln|x|)^{-1/2} + (-\ln|x|)^{-3/2}\right) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

(iii) Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ u = v & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

keine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ besitzen kann.