Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 8

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 17. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 8.1 *Elliptischer Differentialoperator* 5 Punkte

Betrachten Sie auf $\Omega = \mathbb{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ den linearen Differentialoperator

$$L[u] := (1 - x^2) \cdot \partial_x^2 u + 2xy \cdot \partial_x \partial_y u + (1 - y^2) \cdot \partial_y^2 u$$

für reellwertige Funktionen u zweier Variablen. Prüfen Sie, in welchen Punkten (x, y) der offenen Einheitskreisscheibe der Operator L elliptisch ist bzw. ob dieser gleichmäßig elliptisch ist.

Aufgabe 8.2 *Fundamentallemma der Variationsrechnung* 5 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$ eine Abschneidefunktion mit Träger $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\mathbb{B}_1(0)}$.

(a) Machen Sie sich klar, dass sich mithilfe von φ eine glatte Dirac-Folge $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ definieren lässt und die Voraussetzungen von Aufgabe 0.4 erfüllt sind.

(b) Betrachten Sie für $m \in \mathbb{N}$ Mengen der Form

$$K_m := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq 1/m, |x| \leq m\}$$

und zeigen Sie, dass diese eine kompakte Ausschöpfung von Ω bilden, d.h.

- $K_m \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt mit $K_m \subset K_{m+1} \subset \Omega$ für alle $m \in \mathbb{N}$,
- $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$,
- für jedes $x \in \Omega$ gibt es ein $\delta > 0, m \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{B}_\delta(x) \cap \Omega \subset K_m$.

(c) Seien nun $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und gelte

$$\int_\Omega f\psi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 \qquad \forall\, \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass dann $f = 0$ fast überall in Ω gilt.

Hinweis. Zeigen Sie $\varphi_\varepsilon * f = 0$ auf K_m für hinreichend kleines ε. Setzen Sie hierfür f geeignet durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 *Variationsprinzip* 5 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Außerdem seien $f \in C(\overline{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Definiere auf

$$\mathcal{A} := \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \mid u = g \text{ auf } \partial\Omega\}$$

ein Funktional durch

$$E(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n, \qquad u \in \mathcal{A}.$$

Beweisen Sie, dass $u \in \mathcal{A}$ genau dann ein Minimierer von E in $\mathcal{A}$ ist, wenn u das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \quad\; u = g & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

löst. Ein Minimierer $u \in \mathcal{A}$ ist hierbei definiert durch $E(u) \leq E(v)$ für alle $v \in \mathcal{A}$.

Hinweis. Machen Sie sich für $u \in \mathcal{A}$ klar, dass Funktionen der Form $u + t\phi$ für $t \in \mathbb{R}$ und gewisse Funktionen ϕ wiederum in $\mathcal{A}$ liegen.