Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 9

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 7. Januar 2020, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 9.1 *A priori Abschätzung für C^2-Funktionen* 5 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und L sei ein gleichmäßig elliptischer Operator mit den Voraussetzungen aus Satz 5.2. Zusätzlich sei c beschränkt auf Ω.

(a) Beweisen Sie, dass es für jedes $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Konstante $C = C(\Omega, L) > 0$ gibt mit

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} |L[u]|.$$

Hinweis. Betrachten Sie wie in der Vorlesung die Hilfsfunktionen v und $w^{\pm} = \pm u + \delta v$ für geeignet gewähltes $\delta > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass anstelle der Beschränktheit von Ω die schwächere Annahme

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| \leq R\} \quad \text{für ein } R > 0, j \in \{1, \dots, n\}$$

für Aufgabenteil (a) genügt.

Aufgabe 9.2 *Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega)$* 5 Punkte

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Zeigen Sie, dass die α-te schwache partielle Ableitung $D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$ einer Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ eindeutig bestimmt ist.

(b) Beweisen Sie, dass $W^{m,p}(\Omega)$ ein normierter Vektorraum ist und im Fall $p = 2$ sogar ein Skalarprodukt durch

$$(f, g)_{W^{m,2}(\Omega)} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha f \, D^\alpha g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \qquad \forall\, f, g \in W^{m,2}(\Omega)$$

gegeben ist.

Hinweis. Verwenden Sie aus Höherer Analysis die Minkowski-Ungleichung.

Aufgabe 9.3 *Eigenschaften schwacher Ableitungen* 5 Punkte

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ Multiindizes mit $|\alpha| \leq m$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für schwache Ableitungen:

(a) $D^\alpha u \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$ und für alle Multiindizes mit $|\alpha| + |\beta| \leq m$ gilt

$$D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u.$$

(b) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist auch $\lambda u + \mu v \in W^{m,p}(\Omega)$ mit

$$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v.$$

(c) Für eine offene Teilmenge $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ ist $u_{|\widetilde{\Omega}} \in W^{m,p}(\widetilde{\Omega})$.

(d) Für $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ ist $\psi u \in W^{m,p}(\Omega)$ und es gilt die Leibniz-Formel

$$D^\alpha(\psi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \psi \, D^{\alpha-\beta} u,$$

wobei $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\beta-\alpha)!}$ definiert ist.

Bitte wenden!

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe.

Aufgabe 9.4 *Robin-Randwertproblem* 5 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit $\partial\Omega \in C^2$. Betrachten Sie eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{cases} L[u] = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \alpha(x)u + \beta(x) \cdot \nabla u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

für einen gleichmäßig elliptischen Operator mit den Voraussetzungen aus Satz 5.2. Insbesondere sei $c \leq 0$ und $\alpha, \beta_i \in C(\partial\Omega)$ für $i = 1, \ldots, n$ mit

$$\alpha(\beta \cdot \nu) > 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega,$$

wobei ν das äußere Einheitsnormalenfeld bezeichne.

(a) Nehmen Sie an, dass u ein Extremum in $x_0 \in \partial\Omega$ annimmt. Zeigen Sie, dass es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\nabla u(x_0) = \lambda \nu(x_0).$$

Hinweis. Benutzen Sie, dass in einem Randpunkt ein wohldefinierter Normalen- sowie Tangentialraum existiert (siehe Aufgabe 0.3).

(b) Beweisen Sie, dass die Lösung von (1) bereits $u \equiv 0$ erfüllt.