Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 10

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php

Abgabe: 15. Januar, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 10.1 4 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}, 1 \le p \le \infty$ und $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Zeigen Sie, dass für die Fundamentallösung Φ aus Aufgabe 9.3

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, u_0(y)\, \mathrm{d}y \qquad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

wohldefiniert ist und $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ ist.

Aufgabe 10.2 4 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}, 1 \le p \le \infty$ und für $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ analog zu Aufgabe 10.1

$$u(x,t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, u_0(y)\, \mathrm{d}y & \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u_0(x) & \text{für} \quad t = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, so folgt $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.

(b) Für $p < \infty$ bildet $(\Phi(\cdot,t))_{t>0}$ eine Diracfolge (vgl Skript Funktionalanalysis, Definition 2.53).
Bemerkung: Man kann dann mit einer Faltungsapproximation zeigen, dass

$$\lim_{t \searrow 0} \|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

(c) Für alle $(\alpha,k) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0$ existiert ein $C_{\alpha,k} > 0$, sodass

$$\|\partial_x^\alpha \partial_t^k u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_{\alpha,k}\, t^{-k-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{n}{2p}}\, \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, t > 0. \tag{1}$$

Aufgabe 10.3 4 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit Lipschitz-Rand und $(\lambda_k, w_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Spektralbasis aus Eigenwerten $\lambda_k \ge 0$ des Laplace-Operators $-\Delta$ mit (in $L^2(\Omega)$ orthonormalen) Eigenfunktionen $w_k \in W^{1,2}(\Omega)$ zu homogenen Neumann-Randbedingungen, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$\int_\Omega \nabla w_k \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \lambda_k \int_\Omega w_k v \,\mathrm{d}x \qquad \forall\, v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Insbesondere ist $\lambda_0 = 0$ mit $w_0 = |\Omega|^{-1/2}$ und ansonsten $0 < \lambda_k$ eine monoton steigende, divergente Folge von Eigenwerten. Aufgrund der Variationsgleichung sind die Eigenfunktionen w_k paarweise orthogonal in $W^{1,2}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Bitte wenden!

Zeigen Sie mittels Galerkin-Approximation, dass das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \partial_\nu u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = g & \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{2}$$

für jedes $T > 0$ und $g \in L^2(\Omega)$ eine schwache Lösung $u \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ besitzt, gegeben durch

$$u(\cdot,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_k t}(g,w_k)_{L^2(\Omega)} w_k,$$

mit schwacher Ableitung $\partial_t u \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^*)$.

Hinweis. Versuchen Sie den Beweis analog zu Satz 4.13 zu führen, indem Sie nur die geänderten Teilschritte zeigen und gleichbleibende Schritte kommentieren.