Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 12

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall, Christian Düll

http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php

Abgabe: 29.01.2019, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 12.1 4 Punkte

Seien $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$.

(a) Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung der 1-dimensionalen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, u_t = h, & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass dann u durch die folgende Darstellungsformel gegeben ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)\,\mathrm{d}y \right). \tag{2}$$

Insbesondere ist u eindeutig.

(b) Sei nun andererseits u durch (2) gegeben. Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ und löst (1).

Aufgabe 12.2 4 Punkte

In dieser Aufgabe wollen wir (klassische) radialsymmetrische Lösungen der Wellengleichung in 3D betrachten:

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$ eine radialsymmetrische Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass zwei Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ existieren, sodass

$$u(x,t) = \frac{g(|x|+t) + h(|x|-t)}{|x|} \qquad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}. \tag{3}$$

Hinweis: Wegen der Radialsymmetrie von u existiert ein f, sodass $u(x,t) = f(|x|,t)$. Überlegen Sie sich, dass für $n = 3$ gilt

$$\Delta u(x,t) = \frac{2}{|x|} f'(|x|,t) + f''(|x|,t).$$

Führen Sie damit das Problem auf die Wellengleichung in einer Dimension zurück, indem Sie die Funktion $v(r,t) := r\, f(r,t)$ betrachten. Was ist $\partial_{rr}^2 v(r,t)$? Nutzen Sie dann Aufgabe 12.1 um die Darstellung (3) zu erhalten.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.3 4 Punkte

In dieser Aufgabe untersuchen wir die potentielle und die kinetische Energie der Wellengleichung:
Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) &= g(x) & \text{in } \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= h(x) & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei $g \in C_c^2(\mathbb{R})$ und $h \in C_c^1(\mathbb{R})$. Weiterhin definieren wir die potentielle und kinetische Energie auf $[0, \infty)$ durch

$$\mathbb{P}(t) := \int_{\mathbb{R}} |u_x(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x, \qquad \mathbb{K}(t) := \int_{\mathbb{R}} |u_t(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Gesamtenergie $\mathbb{E} := \mathbb{P} + \mathbb{K}$ ist konstant.

(b) Es existiert ein $T > 0$, sodass $\mathbb{P}(t) = \mathbb{K}(t)$ für alle $t > T$.

Hinweis: Nutzen Sie die Lösungsdarstellung aus Aufgabe 12.1.