Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 5

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php

Abgabe: 27. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 5.1 4 Punkte

Betrachten Sie für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}$, die Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y,$$

wobei

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{für} \quad n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & \text{für} \quad n \neq 2 \end{cases}$$

und ω_n das Lebesgue-Maß der n-dimensionalen Einheitskugel $B_1(0)$ ist. Zeigen Sie, dass u eine Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 5.2 4 Punkte

Betrachten Sie das elliptische Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon b \cdot \nabla u + cu = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

auf einer offenen und beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, wobei ν das äußeren Einheitsnormalenfeld bezeichne. Seien $\varepsilon > 0, b \in L^\infty(\Omega)^n, c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq c_0 > 0$ f.ü. in Ω für eine Konstante $c_0 > 0$ und $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie mittels der zugehörigen schwachen Formulierung

$$B[u, \varphi] = (f, \varphi) \qquad \forall \, \varphi \in W^{1,2}(\Omega),$$

dass es für gewisse $\varepsilon > 0$ genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ dieses Problems gibt und diese der Abschätzung

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer Konstanten $C = C(\varepsilon b, c) > 0$ genügt.

Aufgabe 5.3 4 Punkte

(a)* Sei $n \geq 2$ und $f_i \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definiere für $x \in \mathbb{R}^n, i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\tilde{x}_i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Zeigen Sie mittels (verallgemeinerter) Hölder-Ungleichung, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt für

$$f(x) := \prod_{i=1}^n f_i(\tilde{x}_i) \qquad \forall \, x \in \mathbb{R}^n$$

und der folgenden Abschätzung

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

genügt.

Bitte wenden!

Für $n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < n$ sei $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und p^* definiert durch

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

(b) Zeigen Sie für $p = 1 < n$ durch Approximation mittels (a) die Abschätzung

$$\|u\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

(c) Sei nun $1 < p < n$. Zeigen Sie mithilfe von (b) eine analoge Abschätzung der Form

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

für ein $C = C(n,p) > 1$. Beachten Sie, dass $v := |u|^{t-1}u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ für $t > 1$ und $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Die mit * gekennzeichneten Aufgabenteile werden nicht bewertet.