Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 9

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php

Abgabe: 8. Januar 2019, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 9.1 4 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_{x_i}u + c(x)u = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \alpha(x)u + \beta(x)\cdot\nabla u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

für gleichmäßig elliptisches $a_{ij} \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ sowie $b_i, c \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$ und $\alpha, \beta_i \in C(\partial\Omega)$ mit

$$\alpha(\beta \cdot \nu) > 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega,$$

wobei ν das äußere Einheitsnormalenfeld bezeichne. Zeigen Sie, dass dann bereits $u \equiv 0$ folgt.

Hinweis. Benutzen Sie, dass in einem Randpunkt ein wohldefinierter Normalen- sowie Tangentialraum existiert.

Aufgabe 9.2 4 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie die Fundamentallösung $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ der Gleichung

$$\partial_t\Phi - \Delta\Phi = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{2}$$

sodass $\Phi > 0$ gilt und für jeden Zeitpunkt $t > 0$ integrierbar ist mit $\|\Phi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. Bearbeiten Sie hierzu die folgenden Schritte:

(a) Aufgrund eines Skalierungsarguments wählen Sie für $n = 1$ den Ansatz

$$u(x,t) = v(x^2/t) \qquad \text{für} \quad v \in C^\infty(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}, t > 0$$

als Lösung von (2) und bestimmen Sie v. Mit u sind außerdem auch die Ableitungen $\partial_x u, \partial_t u, \partial_{xx} u, \ldots$ Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (2). Finden Sie hiermit die geeignete Fundamentallösung Φ.

(b) Finden Sie mithilfe eines Produktansatzes die Fundamentallösung im Fall $n > 1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3 4 Punkte

Sei $T > 0$ sowie X ein reeller Banach-Raum mit Dualraum X^* und dualer Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h.

$$\langle x^*, x \rangle = x^*(x) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, x^* \in X^*, x \in X.$$

(a)* Zeigen Sie, dass die duale Paarung und das Bochner-Integral vertauschen:

(i) Für jedes $x^* \in X^*$ und $u \in L^1(0,T;X)$ gilt

$$\left\langle x^*, \int_0^T u(t)\ \mathrm{d}t \right\rangle = \int_0^T \langle x^*, u(t) \rangle\ \mathrm{d}t.$$

(ii) Für jedes $x \in X$ und $f \in L^1(0,T;X^*)$ gilt

$$\left\langle \int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t, x \right\rangle = \int_0^T \langle f(t), x \rangle\ \mathrm{d}t.$$

(b) Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein reeller Hilbertraum und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^2(0,T;H)$ mit schwachen Ableitungen $\partial_t u_k \in L^2(0,T;H^*)$, d.h.

$$\int_0^T \partial_t u_k(t)\phi(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^T J(u_k(t))\phi'(t)\ \mathrm{d}t \qquad \forall\, \phi \in C_c^\infty(0,T)$$

mit der Bijektion aus dem Darstellungssatz von Riesz

$$J : H \to H^*, \qquad J(u)(v) = (u,v) \qquad \forall\, u, v \in H.$$

Seien $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sowie deren Ableitungen $(\partial_t u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent mit

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad L^2(0,T;H) \qquad \text{und} \qquad \partial_t u_k \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad L^2(0,T;H^*).$$

Zeigen Sie, dass dann bereits v die schwache Ableitung von u ist, d.h. $v = \partial_t u$.

Hinweis. Für jedes $\phi \in C_c^\infty(0,T)$ und $w \in H$ ist $\phi w \in L^2(0,T;H)$.

Die mit * gekennzeichneten Aufgabenteile werden nicht bewertet.