Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 1

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

`http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php`

Abgabe: 30. Oktober, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 1.1 4 Punkte

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_x + u u_y = 2 & \text{in} \quad D \times \mathbb{R}, \\ u(0,y) = y & \text{für} \quad y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Finden Sie eine explizite Lösung $u \in C^1(D \times \mathbb{R})$ des Randwertproblems (1) mithilfe der Methode der Charakteristiken und bestimmen Sie dabei das maximal mögliche Intervall $D \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.2 4 Punkte

Lösen Sie folgendes Problem mithilfe der Methode der Charaktersitiken:

$$\begin{cases} -y\, u_x + x\, u_y = u & \text{für} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = x^2 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prüfen Sie dabei die Transversalitätsbedingung und schränken Sie gegebenenfalls das Definitionsgebiet ein.

Aufgabe 1.3 4 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$ sowie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es seien der Differenzenquotient D_i^h und der Translationsoperator τ_i^h einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ für $x, x + he_i \in \Omega, h \in \mathbb{R}$, definiert durch

$$(D_i^h u)(x) := \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} \qquad \text{und} \qquad (\tau_i^h u)(x) = u(x + he_i),$$

wobei e_i die kartesischen Einheitsvektoren seien.

Beweisen Sie folgende Aussagen für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Für $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $D_i^h(uv) = (D_i^h u)\tau_i^h v + u D_i^h v$.

(b) Für $u \in L^p(\Omega), v \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt für hinreichend kleines $h \in \mathbb{R}$

$$\int_\Omega (D_i^h v) u \, \mathrm{d}\lambda^n = - \int_\Omega v D_i^{-h} u \, \mathrm{d}\lambda^n.$$

(c) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$, d.h. $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ ist offen mit $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ und $\overline{\Omega'}$ ist kompakt in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Hinweis. Betrachten Sie zunächst $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ und verwenden Sie anschließend Satz 2.67 aus dem Skript Funktionalanalysis.

Bitte wenden!

(d)* Sei $p > 1$, $u \in L^p(\Omega')$ und es gebe eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|D_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq C \qquad \forall\, i = 1, \dots, n,\ 0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega),$$

dann gilt bereits $u \in W^{1,p}(\Omega')$ mit $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega')} \leq C$. Gilt dies auch für $p = 1$?

Hinweis. Verwenden Sie (b) um mit Satz 3.15 von Frechet-Riesz eine in $L^p(\Omega')$ beschränkte Folge zu gewinnen und verwenden Sie die Reflexivität von $L^p(\Omega')$ sowie schwache Konvergenz einer Teilfolge, siehe Satz 4.28, Beispiele 4.23 und 4.6 aus dem Skript Funktionalanalysis.

* Die mit gekennzeichneten Aufgabenteile werden nicht bewertet.